Pemodelan Matematika Pada Aliran Fluida Bola Pejal

Yolanda Norasia
UIN Walisongo Semarang
yolandanorasia@walisongo.ac.id

Abstrak

Pemodelan merupakan salah satu bidang ilmu matematika yang mengambarkan rangkaian peristiwa dan bentuk keadaan yang dapat diamati dalam suatu sistem. Pemodelan matematika merepresentasikan dan menjelasakan permasalahan pada dunia nyata ke dalam persamaan matematis. Salah satu permasalahan yang menggunakan ilmu pemodelan matematika adalah aliran fluida. Dalam pemodelan matematika aliran fluida didasarkan pada penurunan hukum konservasi massa dan hukum II Newton, persamaan pembangunnya dengan menggunakan teori lapisan batas sehingga diperoleh persamaan pembangun kontinuitas dan momentum.

Katakunci : *Pemodelan Matematika, Aliran Fluida, Persamaan Kontinuitas, Persamaan Momentum.*

1. PENDAHULUAN

Model matematika merupakan representasi matematika yang dihasilkan dari pemodelan matematika. Pemodelan matematika merupakan salah satu bidang ilmu yang menggambarkan fenomena-fenomena dalam pernyataan simbolik matematika. Suatu model matematika dikatakan baik jika model matematika yang terbentuk dapat mepresentasikan permasalahan dalam kehidupan nyata. Salah satu permasalahan yang menggunakan penerapan ilmu pemodelan matematika adalah aliran fluida

Pembangunan model matematika aliran fluida didasarkan pada penurunan hukum konservasi massa dan hukum II Newton, persamaan pembangunnya dengan menggunakan teori lapisan batas sehingga diperoleh persamaan pembangun kontinuitas dan momentum. Persamaan kontinuitas diperoleh dari jumlah massa dalam suatu volume kontrol yang dihitung dalam setiap satuan waktu, sedangkan persamaan momentum diperoleh dari tumbukan atau momentum yang terjadi antar partikel. Pada makalah ini dibahas mengenai pembentukan model persamaan pembangun kontinuitas dan momentum pada aliran fluida yang melewati bola pejal.

2. PEMODELAN MATEMATIKA

Pemodelan aliran fluida didasarkan pada penurunan hukum konservasi massa dan hukum II Newton. Fluida yang digunakan dalam pemodelan tersebut adalah fluida nano. Fluida nano dapat dikategorikan ke dalam jenis fluida newtonian dan fluida non-newtonian. Fluida newtonian adalah fluida yang tidak mengalami perubahan viskositas, sedangkan fluida non-newtonian mengalami perubahan viskositas.

Persamaan pembangun yang dibentuk dari aliran fluida nano pada bola pejal menggunakan teori lapisan batas. Persamaan pembangun membentuk persamaan kontinuitas dan persamaan momentum.

2.1 Persamaan Kontinuitas

Jumlah massa dalam suatu volume kontrol yang dihitung dalam setiap satuan waktu => Persamaan Kontinuitas. Prinsip dari persamaan kontinuitas adalah **hukum Kekekalan Massa**. Hukum kekekalan massa menyatakan bahwa jumlahan massa pada suatu sistem adalah konstan. Dengan kata lain,

$$\frac{D\ M_{sys}}{Dt} = 0$$

Berdasarkan teorema transpor Reynold, maka laju aliran massa terhadap perubahan waktu adalah

$$\frac{\partial \rho_{fn}}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_{fn} u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho_{fn} v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho_{fn} w)}{\partial z} = 0 = 0$$

diasumsikan aliran fluida bersifat *incompressible* => densitas kecil (tidak memberikan pengaruh signifikan)

$$\left(\frac{\partial \rho_{fn}}{\partial t} = 0 \right)$$

Objek yang diamati adalah permukaan bola sehingga kecepatan pada arah sumbu z diabaikan, sehingga diperoleh

$$\frac{\partial (\bar{r}\bar{u})}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial (\bar{r}\bar{v})}{\partial \bar{y}} = 0$$

atau

$$\nabla . \mathbf{V} = 0. \tag{1}$$

2.2 Persamaan Momentum

Pergerakan dari partikel fluida nano => Tumbukan/Momentum. Prinsip dari persamaan momentum adalah **hukum Newton II**. Hukum Newton II menyatakan bahwa besar momentum terhadap perubahan waktu sama dengan besarnya keseluruhan gaya-gaya yang bekerja pada sistem (Versteeg, 2007). Hukum Newton II yang berlaku dalam suatu sistem dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$\iiint_{cv} \rho_{fn} \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} + \iiint_{cv} \rho_{fn} \nabla . \ \boldsymbol{V}\ \boldsymbol{V}\ dV = \iiint_{cv} \boldsymbol{F} dV \tag{2}$$

dan berdasarkan persamaan kontinuitas, yaitu $\nabla . \mathbf{V} = 0$, maka

$$\nabla . \ (\boldsymbol{V}\ \boldsymbol{V}) = (\boldsymbol{V} . \ \nabla\ \boldsymbol{V})$$

Sehingga Persamaan (2)

$$\rho_{fn} \iiint_{cv} \left(\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} + (\boldsymbol{V} . \ \nabla\ \boldsymbol{V}) \right) = \iiint_{cv} \boldsymbol{F} dV$$

atau dapat dituliskan sebagai berikut

$$\rho_{fn} \frac{D\boldsymbol{V}}{Dt} = \sum F$$

Gaya-gaya yang bekerja pada $\sum F$ merupakan **gaya permukaan** ($\boldsymbol{F_s}$) dan **gaya apung** ($\boldsymbol{F_B}$). Sehingga dapat dituliskan sebagai berikut

$$\rho_{fn}\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t}+(\boldsymbol{V}.\,\nabla\,\boldsymbol{V})=F_s+F_B$$

- **Gaya Permukaan (Fs)**

Gaya-gaya yang bekerja pada permukaan sebuah elemen kubus kecil dari fluida berupa tegangan-tegangan. Tegangan tersebut merupakan tegangan normal (σ) dan tegangan geser (τ).

Gaya-gaya yang bekerja pada arah sumbu x dapat diberikan sebagai berikut

$$F_{sx}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}$$

sedangkan gaya yang bekerja pada sumbu y adalah

$$F_{sy}=-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}$$

dan gaya-gaya yang bekerja pada sumbu z adalah

$$F_{sz}=-\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}$$

Resultan gaya permukaan merupakan jumlahan gaya permukaan pada sumbu x,y dan sumbu z. Resultan gaya permukaan yang terbentuk dari diatas diperoleh sebagai berikut.

$$\boldsymbol{F_s}=F_{sx}\,i+F_{sy}\,j+F_{sz}k$$

Karena objek yang diamati adalah permukaan bila maka

$$\boldsymbol{F_s}=F_{sx}\,i+F_{sy}\,j$$

Aliran fluida diasumsikan tak mampu mampat (*incompressible*) sehingga jumlahan dari tegangan normal dan tegangan geser diperoleh sebagai berikut

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x}=\mu_{fn}\nabla^2 u+\mu_{fn}\frac{\partial}{\partial x}(\nabla.\mathbf{V})=\mu_{fn}\nabla^2 u$$

maka gaya geser untuk arah sumbu x dapat ditulis

$$F_{sx}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu_{fn}\nabla^2 u$$

dengan cara yang sama, maka gaya geser untuk arah sumbu y diperoleh

$$F_{sy}=-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu_{fn}\nabla^2 v$$

dan gaya geser untuk arah sumbu z diperoleh

$$F_{sz}=-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu_{fn}\nabla^2 w$$

sehingga, gaya permukaan total diperoleh sebagai berikut diperoleh

$$\boldsymbol{F_s}=\boldsymbol{\nabla}\mathbf{p}+\boldsymbol{\mu_{fn}}\boldsymbol{\nabla}^{\mathbf{2}}\boldsymbol{V}$$

- **Gaya Apung ($\boldsymbol{F_B}$)**

Selain gaya permukaan $\boldsymbol{F_s}$, persamaan momentum juga dipengaruhi oleh gaya apung $\boldsymbol{F_B}$ (*buoyancy force*). Gaya apung dapat dituliskan sebagai berikut

$$F_B = \rho_{fn} g$$

dengan substitusi F_B ke Persamaan momentum diperoleh

$$\rho_{fn}\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} + (\boldsymbol{V}.\ \nabla\ \boldsymbol{V}) = F_s + F_B$$

dengan kata lain

$$\rho_{fn}\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} + (\boldsymbol{V}.\ \nabla\ \boldsymbol{V}) = -\boldsymbol{\nabla}\mathbf{p} + \boldsymbol{\mu_{fn}}\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{V} + \rho_{fn} g$$

untuk tekanan p dapat dituliskan dengan

$$p = p_d + p_h$$

bentuk gradien tekanan yang disebabkan oleh tekanan hidrostatis dapat dituliskan sebagai berikut

$$\nabla p_h = \rho_\infty g$$

selanjutnya, bentuk ∇p dapat dituliskan sebagai berikut

$$\nabla p = \nabla p_d + \nabla p_h$$
$$\nabla p = \nabla p_d + \rho_\infty g$$

dengan substitusi $\nabla p = \nabla p_d + \rho_\infty g$ ke persamaan momentum diperoleh

$$\rho_{fn}\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} + (\boldsymbol{V}.\ \nabla\ \boldsymbol{V}) = -\boldsymbol{\nabla}\mathbf{p} + \boldsymbol{\mu_{fn}}\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{V} + \rho g$$

$$\rho_{fn}\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} + (\boldsymbol{V}.\ \nabla\ \boldsymbol{V}) = -(\nabla p_d + \rho_\infty g) + \boldsymbol{\mu_{fn}}\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{V} + \rho_{fn} g$$

$$\rho_{fn}\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} + (\boldsymbol{V}.\ \nabla\ \boldsymbol{V}) = -\nabla p_d - \rho_\infty g + \boldsymbol{\mu_{fn}}\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{V} + \rho_{fn} g$$

Sehingga persamaan momentum diperoleh sebagai berikut

$$\rho_{fn}\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} + (\boldsymbol{V}.\ \nabla\ \boldsymbol{V}) = -\nabla p_d + (\rho_{fn} - \rho_\infty) g + \boldsymbol{\mu_{fn}}\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{V}. \tag{3}$$