Reformulasi Asas Kesetaraan dan Asas Kovariansi Umum Dalam Teori Relativitas Umum*

M. Ardhi K.

email : muhammad_ardhi@walisongo.ac.id
web : http://abu-khadijah.web.id

7 Juni 2013

بِسمِ اللهِ الرَّحمٰنِ الرَّحِيمِ

"However, if you do not appreciate the mathematics, you cannot see, among the great variety of facts, that logic permits you to go from one to the other."
–R. P. Feynman–

1 Pendahuluan

Suatu kenyataan yang luar biasa dalam fisika adalah sangat sedikitnya hukum-hukum dasar mengenai perilaku alam semesta dibandingkan dengan banyaknya fenomena-fenomena fisis yang telah berhasil dijelaskan dengan hukum-hukum dasar tersebut. Dua teori terkenal yang dibangun fisikawan bernama Albert Einstein adalah teori relativitas khusus (TRK) dan teori relativitas umum (TRU). Teori relativitas khusus yang terbit pada tahun 1905 memunculkan konsep revolusioner mengenai ruang-waktu. Sedangkan teori relativitas umum yang terbit pada tahun 1916 dimaksudkan untuk memperumum TRK. Tetapi ada beberapa fisikawan maupun matematikawan yang berpendapat bahwa TRU tidak sama sekali memperumum atau memperluas TRK.

Dalam makalahnya, Einstein (1916) meletakkan TRU di atas dua asas, yakni asas kovariansi umum (AKU) dan asas kesetaraan (AK). Terhadap maksud yang ingin disampaikan oleh Einstein dalam kedua asas TRU tersebut, orang sudah paham. Namun bentuk eksplisit ungkapan kedua asas tersebut, sebagaimana diungkapkan oleh Einstein maupun beberapa buku teks TRU bermasalah dari sisi matematisnya. Dalam tulisan ini akan dipaparkan kesalahan ungkapan kedua asas tersebut secara matematis, dan perbaikan terhadap ungkapan kedua asas tersebut.

2 Asas Kovariansi Umum Einstein

Asas umum relativitas, yang kini dikenal luas dengan nama asas kovariansi umum, dinyatakan oleh Einstein (dalam terjemahan bahasa Inggris) sebagai[3]

*disampaikan dalam kegiatan diskusi dosen Fakultas Ilmu Tarbiyah dan Keguruan IAIN Walisongo, tanggal 7 Juni 2013. Makalah ini sepenuhnya diketik dengan LaTeX.

> "*The general laws of nature are to be expressed by equations which hold good for all systems of co-ordinates, that is, are co-variant with respect to any substitutions whatever (generally co-variant).*"

Motivasi yang mendasari Einstein untuk memberikan AKU secara eksplisit tertuang dalam makalahnya yang sama yang berbunyi[3]

> "*The laws of physics must be of such a nature that they apply to systems of reference in any kind of motion.*"

Istilah kovariansi biasa diidentikkan dengan ketidakubahan bentuk suatu sistem persamaan diferensial terhadap suatu transformasi koordinat dari sistem koordinat yang satu ke sistem koordinat yang lain. Hal ini bermakna bahwa terdapat suatu kelas sistem koordinat dan grup transformasi yang terkait dengan kekovarianan sistem persamaan diferensial itu. Kelas sistem koordinat berisi sistem-sistem koordinat yang di dalamnya sistem persamaan diferensial itu berbentuk sama. Sedangkan grup transformasinya berisi transformasi-transformasi yang menghubungkan sistem-sistem koordinat di dalam kelas tersebut.

Di dalam TRK, kelas sistem koordinat yang dimaksud adalah kelas yang berisi sistem koordinat inersial dan grup transformasi yang dimaksud alah grup Lorentz. Istilah kovariansi umum sendiri dimaksudkan sebagai kovariansi terhadap semua transformasi koordinat yang diizinkan.

Melihat pada kaitan antara kovariansi Lorentz (pada formulasi standar[1]) dengan asas kovariansi relativitas khusus, Einstein berasumsi adanya kaitan serupa antara kovariansi umum dengan asas umum relativitas. Dari sini muncul kebingungan karena **seolah-olah terlihat bahwa kovariansi umum secara unik mengkarakteristikkan TRU**.

3 Asas Kesetaraan

Sebelum dimunculkan AK oleh Einstein, telah ada suatu fakta yang menyatakan bahwa massa inersia (lembam)[2] dan massa gravitasi[3] untuk sembarang obyek sama.[4] Mungkin kenyataan inilah yang mengilhami Einstein (1911) untuk mempostulatkan bahwa kerangka inersial dalam medan gravitasi homogen setara dengan kerangka dipercepat (dengan percepatan yang sesuai) dalam ruang tanpa medan gravitasi.[5] Kemudian pada tahun 1916, sebagai salah satu landasan bagi teori relativitas umumnya, ia mengungkapkan asas yang terlihat mirip dengan postulat lima tahun sebelumnya yang menyatakan bahwa TRK tetap berlaku untuk wilayah ruang-waktu yang cukup kecil. Dalam bentuk

[1] Formulasi standar suatu sistem persamaan diferensial di dalam suatu teori ruang-waktu ialah bentuk dari sistem persamaan diferensial itu yang tidak menampilkan obyek absolut dari teori ruang-waktu tadi, sehingga hanya obyek dinamis yang ditampilkan. Formulasi kovariansi umum dimaksudkan sebagai bentuk sistem persamaan diferensial yang menampilkan obyek absolut dan obyek dinamis.

[2] Massa inersia terkait dengan hambatan (keengganan) yang dialami obyek untuk merubah gerakan. Massa ini muncul pada hukum kedua Newton dan tak bergantung pada jenis gaya yang terkait (Carrol,1997).

[3] Massa gravitasi merupakan suatu besaran yang terkait dengan gaya gravitasi. Massa gravitasi dapat disebut sebagai "muatan gravitasi" dari suatu benda (Carrol, 1997).

[4] Menurut Carmeli (1982), bukti eksperimen mengenai fakta ini pertama kali diberikan oleh Galileo pada tahun 1610.

[5] Postulatnya ini ia kemukakan dalam makalahnya yang berjudul "*On The Influence of Gravitation on The Propagation of Light*" pada tahun 1911. Makalah aslinya adalah "*Über den Einfluss der Schwerkraft auf die Ausbreitung des Lichtes*," Annalen der Physik,35,1911.

aslinya (terjemahan Bahasa Inggris), asas ini berbunyi[3]

> *"For infinitely small four-dimensional regions the theory of relativity in the restricted sense is appropriate, if coordinates are suitably chosen".*

Di dalam ruang-waktu datar, hukum-hukum fisika umumnya dinyatakan dalam turunan parsial dan metrik datar. Menurut AK, hukum ini tetap berlaku ketika hadirnya gravitasi selama digunakan koordinat normal Riemannian (KNR). Dengan menggunakan KNR, meskipun telah dibawa ke bentuk tensor, hukum itu akan tereduksi menjadi hukum di ruang datar.

4 Model Manifold Lorentzian untuk ruang-waktu TRU

Untuk memodelkan ruang-waktu klasik TRU, dipilih suatu kelas **manifold** yang cocok. Kelas manifold yang cocok itu akan disebut sebagai ruang-waktu. Manifold ini diasumsikan **berdimensi 4**, **parakompak**, **tersambung**, **Hausdorff**, dan **tanpa batas**. Persyaratan parakompak akan mengijinkan hadirnya **metrik Lorentzian**, sedangkan persyaratan lainnya muncul secara alamiah dari tinjauan fisis. Tidak mungkin atau tidak akan mempunyai arti untuk berbicara tentang dunia yang terdiri dari wilayah-wilayah terpisah. Hal ini mengharuskan model ruang-waktu yang dipakai bersifat tersambung. Manifold yang dipakai juga harus bersifat tanpa batas karena model untuk interaksi fisis membutuhkan syarat bahwa setiap titik memiliki lingkungan yang sama dengan ruang Minkowski dalam TRK. Hal ini ditegaskan oleh AK.[6] Einstein (1961) pernah mengatakan bahwa dalam TRU, "**ruang**"[6] **tanpa metrik Lorentzian tidak mempunyai arti fisis apapun. Seandainya medan gravitasional, yakni fungsi g_{ik} , dihilangkan maka "ruang" itu tidak akan berubah menjadi ruang Minkowski, bahkan ruang topologis sekalipun.**

Ruang-waktu juga diasumsikan bersifat dapat diorientasi waktunya (time- orientable) dan dapat diorientasi ruangnya (*space-orientable*).[7] Dengan dapat diorientasi waktunya, vektor-vektor bukan bak-ruang pada setiap titik dapat dikelompokkan, secara kontinu, menjadi dua kelas yang dilabeli dengan terarah ke masa depan (*future-directed*) dan terarah ke masa lampau (*past-directed*). Kemudian dengan dapat diorientasi ruangnya, vektor-vektor bak-ruang anggota suatu basis dapat dikelompokkan, secara kontinu, menjadi basis putar-kiri (*left-handed bases*) dan basis putar-kanan (*right-handed bases*). Jika ruang-waktu diasumsikan dapat diorientasi waktunya, maka ruang-waktu itu juga dapat diorientasi ruangnya.[8]

[6] Kata "ruang" disini dibedakan dengan "yang mengisi ruang".

[7] Beberapa eksperimen di dunia partikel elementer tidak invarian dibawah pembalikan muatan atau paritas, baik secara sendiri-sendiri maupun secara bersama-sama. Meskipun demikian, terdapat alasan teoretis untuk mempercayai bahwa semua interaksi invarian terhadap kombinasi pembalikan muatan, paritas, dan waktu (teorema CPT) [5].

[8] Menurut Hawking dan Ellis (1997), pembuktian pernyataan ini dapat dilakukan dengan menggunakan bukti eksperimen tanpa mengacu pada teorema CPT.

5 Asas Kovariansi Umum dan Untingan Kerangka Ortonormal

Pernyataan Einstein di atas, yakni

> "ruang tanpa metrik Lorentzian tidak mempunyai arti fisis apapun. Seandainya medan gravitasional, yakni fungsi g_{ik}, dihilangkan maka ruang itu tidak akan berubah menjadi ruang Minkowski, bahkan ruang topologis sekalipun"

bermakna bahwa meskipun titik-titik pada manifold secara matematis dikaitkan dengan suatu sistem koordinat, tetapi secara fisis belum memiliki arti apa-apa sebelum dihadirkan suatu medan tensor metrik di manifold itu. Titik-titik pada manifold tidak mewakili suatu peristiwa, melainkan lebih tepat untuk mengatakan bahwa pemetaan dari suatu titik pada penampang lokal pada untinganlah yang lebih memiliki signifikansi fisis[7]. Petunjuk ini memberikan gambaran bahwa **konsep akhir Einstein mengenai AKU lebih tepat terkait dengan konsep kerangka di atas suatu manifold daripada konsep sistem koordinat di dalam manifold**.

Kalimat terakhir mengindikasikan bahwa perlunya melibatkan konsep untingan serat (*fiber bundle*) di atas manifold. Lebih khusus lagi, dikarenakan sebagai ruang-waktu digunakan manifold $\mathcal{M}$ bermetrik Lorentzian g^L maka konsep untingan serat yang tepat dalam permasalahan ini adalah untingan kerangka ortonormal terbatasi $F_o\mathcal{M}(g^L)$ yang memiliki grup struktur berupa grup Lorentz wajar ortokronus $SO_o(3,1)$. Untingan ini dapat dibentuk dari hasil reduksi untingan kerangka linear $L\mathcal{M}$ bergrup struktur $GL(4,\mathbb{R})$. Unsur pada serat $\pi^{-1}(x) \subset F_o\mathcal{M}(g^L)$ pada di atas titik $x \in \mathcal{M}$ merupakan kerangka ortonormal

$$\begin{aligned} u(x) &= (e_0(x), \ldots, e_3(x)), \\ e_i(x) &= \lambda_i{}^{\mu}(x)\partial_\mu \in T_x\mathcal{M}. \end{aligned} \tag{1}$$

dengan $\{e_i = i = 1,2,3\}$ semuanya putar kanan dan $e_0(x)$ merupakan vektor bak-waktu yang menunjuk ke masa depan.

Dengan memanfaatkan fitur yang tersedia pada $F\mathcal{M}_o(g^L)$ maka asas kovariansi umum dapat diungkapkan dalam bentuk

> Hukum-hukum alam yang umum harus dapat dinyatakan secara sama menurut semua kerangka acuan (ortonormal) lokal.

Pernyataan asas kovariansi umum ini tidak lagi melibatkan sistem koordinat melainkan melibatkan kerangka acuan.

6 Asas Kesetaraan dan Untingan Kerangka Ortonormal

Seperti telah disebutkan di atas, Einstein mengungkapkan asas kesetaraan dalam kalimat berikut

> *"For infinitely small four-dimensional regions the theory of relativity in the restricted sense is appropriate, if coordinates are suitably chosen".*

Pada pernyataannya tersebut, Einstein melibatkan konsep koordinat. Sementara pada pembahasan sebelumnya telah ditegaskan bahwa pelibatan konsep koordinat untuk mengungkapkan kovariansi tidaklah tepat. Sehingga asas kesetaraan versi Einstein tersebut harus dimodifikasi sedemikian rupa sehingga pernyataannya tidak melibatkan sistem koordinat, melainkan kerangka acuan.

Seperti telah disebutkan sebelumnya, fitur kerangka acuan disediakan oleh untingan kerangka ortonormal terbatasi $F\mathcal{M}_o(g^L)$. Istilah kerangka acuan dalam fisika sesungguhnya tidak diidentikkan dengan sebuah kerangka ortonormal $u(x) \in \pi^{-1}(x)$, melainkan dengan serangkaian $u(x)$ pada berbagai serat $\pi^{-1}(x)$. Setiap serat hanya diambil satu buah kerangka linear $u(x)$.[9] Melihat pada definisi tersebut, istilah kerangka bergerak merupakan kasus khusus dari apa yang disebut sebagai penampang pada untingan serat.

Oleh karena itu, konsep kerangka acuan dalam fisika lebih tepat dikaitkan dengan istilah kerangka bergerak (*moving frame*) dalam $F\mathcal{M}_o(g^L)$. Di kalangan matematikawan, konsep kerangka bergerak sering disebut sebagai *vierbein*. Pelibatan konsep kerangka bergerak merupakan langkah yang semakin mendekati motivasi Einstein dalam merumuskan asas kovariansi umum

> "*The laws of physics must be of such a nature that they apply to systems of reference in any kind of motion.*"

Untuk merumuskan asas kesetaraan yang lebih tepat, maka perlu dilibatkan postulat geodesik Einstein yang menyatakan bahwa sembarang partikel titik netral (dengan massa tidak nol) mengikuti geodesik bak-waktu ketika sedang jatuh bebas dalam manifold ruang-waktu $(\mathcal{M}, g^L)$. Sementara untuk sinar cahaya (atau "foton", yang dianggap sebagai partikel bermassa nol) mengikuti geodesik *null* ketika sedang jatuh bebas.

Geodesik yang dimaksud adalah kurva $\gamma = \{x(\tau)|\tau \in I\}$ di $\mathcal{M}$ yang memiliki karakteristik berlakunya persamaan

$$\begin{aligned} \ddot{x}^\lambda + \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu &= 0, \\ \ddot{x}^\lambda &\equiv d^2x^\lambda/d\tau^2, \\ \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} &= g^{\lambda\kappa}g(\partial_\kappa, \nabla_{\partial_\mu}\partial_\nu), \end{aligned} \tag{2}$$

pada geodesik tersebut. Simbol $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ disebut sebagai koneksi Levi-Civita. Kerangka bergerak s tidak lain merupakan penampang jika diterapkan diterapkan pada geodesik, maka koneksi Levi-Civita akan lenyap, yakni $\Gamma^i{}_{jk} = 0$ di semua $x \in \gamma \cap M^s$. Jika kerangka bergerak s diterapkan pada geodesik bak-waktu γ, maka kerangka bergerak tersebut dinamakan sebagai **kerangka bergerak inersial** untuk geodesik bak-waktu γ, jika dalam subhimpunan

$$s_\gamma = \{(e_0(x), e_1(x), e_2(x), e_3(x))|x \in \gamma \cap M^s\} \subset s, \tag{3}$$

semua unsur kerangka $e_0(x)$ bertepatan dengan vektor singgung terhadap geodesik itu. Jika s_γ ortonormal, maka s disebut sebagai **kerangka bergerak Lorentz inersial** sepanjang γ.

Sekarang asas kesetaraan dapat dinyatakan sebagai berikut

> Dalam sembarang kerangka bergerak Lorentz inersial sepanjang geodesik bak-waktu γ, semua hukum non-gravitasional yang dinyatakan dalam koordinat tensor terhadap kerangka bergerak inersial itu disetiap titik sepanjang γ harus bertepatan dengan bentuk relativitas khususnya yang dinyatakan dalam koordinat tensor terhadap kerangka Lorentz global di ruang-waktu Minkowski.

[9] Bagi pembaca yang menjadi bingung dengan pernyataan ini perlu mengingat kembali bahwa x melabeli suatu peristiwa dan tersusun atas (x_0, x_1, x_2, x_3).

7 Penutup

Dari hasil pembahasan di atas dapat disimpulkan secara umum bahwa pernyataan asas kovariansi umum dan asas kesetaraan versi Einstein tidak tepat secara matematis jika dipertimbangkan motivasi yang mendasari dikeluarkan asas tersebut. Hal ini mungkin saja terjadi akibat belum lazimnya penggunaan konsep untingan serat (*fibre bundle*) dalam dunia fisika pada saat teori relativitas umum diumumkan oleh Einstein. Seperti yang telah dibahas di atas, pernyataan asas kovariansi umum dan asas kesetaraan sesungguhnya lebih tepat diungkapkan dengan melibatkan kerangka acuan, bukan sistem koordinat. Hal ini dapat diakomodir dengan melibatkan konsep untingan kerangka ortonormal terbatasi $F\mathcal{M}_0(g^L)$.

Daftar Pustaka

[1] Khalif, M. A., *Tinjauan Asas Kovariansi Umum dan Asas Kesetaraan Melalui Konsep Untingan Kerangka Orthonormal* (Skripsi S1, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Gadjah Mada, 2007)

[2] Einstein, A., *On the Electrodynamics of Moving Bodies* (Ann. Phys.17, 891. Versi terjemahan bahasa Inggris terdapat di buku *The Principle of Relativity* (Dover, New York, 1952))

[3] Einstein, A., *The Foundations of The General Theory of Relativity* (Ann. Phys.49, 769. Versi terjemahan bahasa Inggris terdapat di buku *The Principle of Relativity* (Dover, New York, 1952))

[4] Carmeli, M., *Classical Fields: General Relativity and Gauge Theory* (John Wiley & Sons, Inc., New York, 1982)

[5] Hawking, S.W., Ellis, G.F.R., *The Large Scale Structure of Space-Time* (Cambridge University Press, Cambridge,1997)

[6] Felice, F.D., Clarke, C.J.S., *Relativity on Curved Manifolds* (Cambridge University Press, Cambridge,1995)

[7] Prugovecki, E., *Principles of Quantum General Relativity* (World Scientific, Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, 1995)